TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika-informaatikateaduskond
Puhta matemaatika instituut

KAIE KUBJAS

ABSTRAKTSED KLOONID JA OPERAADID

Bakalaureusetöö

Juhendaja: prof. Kalle Kaarli

Autor: .... „   “ juuni 2007

Juhendaja: .... „   “ juuni 2007

Instituudi juhataja: .... „   “ juuni 2007

Tartu 2007

Sisukord

Sissejuhatus

Abstraktse klooni puhul on tegemist universaalalgebra olulise mõistega, mis pärineb 1958. aastal ilmunud P. Halli artiklist „Some word problems“. Tavaoperaadi mõiste pärineb 1972. aastal ilmunud J. Peter May artiklist „The Geometry of Iterated Loop Spaces“ ning siiamaani on ta laiemalt kasutusel peamiselt topoloogias (vt artikleid [4] ja [5]).

Antud bakalaureusetöö eesmärk on tutvuda nende kahe mõistega ning selgitada, kuidas on nad omavahel seotud. Kokkuvõtlikult öeldes on mõlema puhul tegemist ühe üldisema mõiste, mida nimetatakse W-operaadiks, erijuhtudega. W-operaad on teatud omadustega funktor kategoorial W, mille objektideks on hulgad $\{0, 1 \ldots, n\}$, kus n on naturaalarv, ja morfismideks mingid objektidevahelised kujutused, mille korral $f(0) = 0$ ja $f^{-1}(0) = \{0\}$. Kui morfismideks on kõik antud tingimust rahuldavad bijektiivsed kujutused, siis on tegemist tavaoperaadidega, ning kui morfismideks on kõik antud tingimust rahuldavad kujutused, siis abstraktsete kloonidega. See tulemus on saadud artiklis [5], mille põhjal antud bakalaureusetöö on ka suures osas kirjutatud.

Käesolev bakalaureusetöö koosneb neljast peatükist.

Esimese peatükis toome sisse edaspidises vajalikud kategooriateooria mõisted. Siin tugineme õpikutele [1] ja [2].

Teises peatükis defineerime abstraktse klooni (kasutades artiklit [5]) ja tavaoperaadi (kasutades artiklit [3]). Samuti esitame mõlema mõiste juures illustreerivad näited.

Kolmandas peatükis toome sisse verbaalse kategooria mõiste ning selle abil defineerime W-operaadi. Mõlema mõiste juures esitame näited koos tõestustega.

Viimane peatükk koosneb kahest teoreemist – esimeses sõnastame ja tõestame tavaoperaadide ning W-operaadide ning teises abstraktsete kloonide ja W-operaadide vahelise seose. Nii kolmandas kui neljandas peatükis tugineme artiklile [5].

1 Kategooriateooria mõisteid

Esimeses peatükis toome sisse edaspidises vajalikud kategooriateooria mõisted.

1.1 Kategooria definitsioon ja näited

Definitsioon 1. *Kategooria* koosneb kahte tüüpi suurustest - objektidest ja morfismidest. Kui K on kategooria, siis tema objektid moodustavad klassi (mis ei tarvitse olla hulk), mida me tähistame $\mathrm{Obj}(K)$. Mis tahes objektipaariga $A, B \in \mathrm{Obj}(K)$ on seotud hulk $K(A, B)$, mida nimetatakse morfismide hulgaks objektist A objekti B nii, et:

(i) kui $f \in K(A, B)$ ja $g \in K(B, C)$, siis eksisteerib nende korrutis $gf \in K(A, C)$;

(ii) kui morfismide korrutised $h(gf)$ ja $(hg)f$ on olemas, siis nad on võrdsed;

(iii) mis tahes objekti A korral leidub hulgas $K(A, A)$ eriline morfism 1_A (objekti A ühikmorfism) nii, et $f1_A = f$ ja $1_A g = g$ iga $f \in K(A, B)$ ja iga $g \in K(C, A)$ korral.

Definitsioon 2. Kategooria K objekte A ja B nimetatakse *isomorfseteks*, kui leiduvad morfismid $f : A \longrightarrow B$ ja $g : B \longrightarrow A$ nii, et $gf = 1_A$ ja $fg = 1_B$.

Näide 3. Kategooria Set. Selle kategooria objektideks on kõik hulgad, morfismideks on aga kõik hulkade kujutused.

Näide 4. Kategooria Set^ω. Selle kategooria objektideks on kõik hulkade loenduvad jadad, morfismideks on aga kõik hulkade kujutuste loenduvad jadad (mis tegutsevad komponenthaaval).

Näide 5. Kategooria Group. Selle kategooria objektideks on kõik rühmad, morfismideks aga rühmade homomorfismid.

1.2 Funktorid

Definitsioon 6. *Kujutuseks* kategooriast K kategooriasse L nimetatakse eeskirja F, mis igale K objektile A seab vastavusse L objekti FA ning igale K morfismile $f : A \longrightarrow B$ seab vastavusse L morfismi $Ff : FA \longrightarrow FB$.

Definitsioon 7. Olgu K ja L kategooriad. Kujutust $F : K \to L$ nimetatakse *kovariantseks funktoriks* kategooriast K kategooriasse L, kui:

(i) $F(gf) = (Fg)(Ff)$ mis tahes morfismide f ja g korral, mida saab korrutada kategoorias K (see tähendab, et F säilitab morfismide korrutamise);

(ii) $F(1_A) = 1_{FA}$ mis tahes $A \in \mathrm{Obj}(K)$ korral.

Definitsioon 8. Kategooria K *ühikfunktoriks* 1_K nimetatakse funktorit, mis jätab paigale nii kategooria K objektid kui ka morfismid.

Definitsioon 9. Olgu K ja L kategooriad. Funktorit $F : K \longrightarrow L$ nimetatakse *isomorfismiks*, kui leidub selline funktor $G : L \longrightarrow K$, et $FG = 1_L$ ja $GF = 1_K$.

Kategooriad K ja L on *isomorfsed*, kui leidub isomorfism $F : K \longrightarrow L$.

Definitsioon 10. Olgu K ja L kategooriad, $F, G : K \longrightarrow L$ kovariantsed funktorid ja $\eta : \mathrm{Obj}(K) \longrightarrow \mathrm{Mor}(L)$, kus $\mathrm{Mor}(L)$ on kategooria L kõikide morfismide klass, selline eeskiri, et on täidetud järgmised kaks tingimust:

(i) kui $A \in \mathrm{Obj}(K)$, siis $\eta A \in L(FA, GA)$;

(ii) järgmine diagramm on suvaliste objektide $A, A' \in \mathrm{Obj}(K)$ ja suvalise morfismi $f : A \longrightarrow A'$ korral kommutatiivne,

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\eta A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FA' \arrow[r, "\eta A'"'] & GA' \end{tikzcd} .$$

Sellist eeskirja η nimetatakse *loomulikuks teisenduseks* funktorist F funktorisse G ja tähistatakse $\eta : F \longrightarrow G$.

1.3 Kokorrutised

Definitsioon 11. Olgu K kategooria ja $A, B \in \mathrm{Obj}(K)$. Objekti $C \in \mathrm{Obj}(K)$ koos morfismidega $\iota_A : A \to C$ ja $\iota_B : B \to C$ nimetatakse objektide A ja B *kokorrutiseks*, kui mis tahes objekti $D \in \mathrm{Obj}(K)$ ja morfismide $f : A \to D$ ning $g : B \to D$ korral leidub üheselt määratud morfism $h : C \to D$ nii, et järgmine diagramm on kommutatiivne,

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, "h"] & \\ A \arrow[ur, "\iota_A"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[ul, "\iota_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & D & \end{tikzcd} ,$$

see tähendab, et $f = h\iota_1$ ja $g = h\iota_B$.

Objektide A ja B kokorrutist tähistatakse $A \amalg B$ ning morfisme ι_A ja ι_B nimetatakse vastavalt objekti A ja objekti B *sisestusteks* sellesse kokorrutisse.

Üldistame selle definitsiooni kahe objekti juhult ükskõik kui suure objektide süsteemi $A_i \in \mathrm{Obj}(K), i \in I$ juhule. Objektide $A_i, i \in I$, kokorrutiseks on objekt $\amalg_{i \in I} A_i$ koos sellise morfismide süsteemiga

$$\{\iota_i : A_i \longrightarrow \amalg_{i \in I} A_i\},$$

et mis tahes objekti D ja mistahes morfismide $f_i : A_i \longrightarrow D, i \in I$, süsteemi korral leidub üheselt määratud morfism $h : \amalg A_i \longrightarrow D$ nii, et $f_i = h\iota_i$.

Kui A ja B on mingi kategooria kaks objekti, siis nende kokorrutis ei tarvitse eksisteerida. Kui ta aga on olemas, siis on ta ühene isomorfismi täpsuseni.

Näide 12. Vaatleme Abeli rühmade kategooriat Agroup. Abeli rühmade $A_i, i \in I$, kokorrutiseks on nende otsesumma $\oplus\Sigma_{i \in I} A_i$ koos sisestustega

$$\{\iota_i : A_i \longrightarrow \oplus\Sigma_{i \in I} A_i\},$$

mis on defineeritud järgmiselt:

$$\iota_i(a_i) = (\ldots, 0, a_i, 0, \ldots),$$

mis tahes $i \in I$ korral.

Näide 13. Vaatleme hulkade kategooriat Set. Hulkade $A_i, i \in I$, kokorrutiseks on nende lõikumatu ühend $\dot\cup_{i \in I} A_i$ koos sisestustega

$$\{\iota_i : A_i \longrightarrow \dot\cup_{i \in I} A_i\},$$

$i \in I$.

1.4 Konservatiivsed ruudud

Definitsioon 14. Kuulugu kõik vaadeldavad objektid ja morfismid ühte ja samasse kategooriasse. Diagrammi

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

nimetatakse *konservatiivseks ruuduks*, kui

(i) ta on kommutatiivne, see tähendab, et $fp_1 = gp_2$;

(ii) alati, kui on antud objekt P' ning sellised morfismid $q_1 : P' \to A$ ja $q_2 : P' \to B$, et $fq_1 = gq_2$, siis leidub üheselt määratud morfism $h : P' \to P$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "q_1"] \arrow[ddr, "q_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

on kommutatiivne, see tähendab, et $q_1 = p_1 h$ ja $q_2 = p_2 h$.

On teada, et kategoorias Set saab iga diagrammi

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

täiendada konservatiivseks ruuduks nii, et

$$P = \{(b, a) \in B \times A | g(b) = f(a)\}$$

ning p_1 ja p_2 on projektsioonid vastavalt esimesele ja teisele komponendile.

1.5 Ratsionaalne ekvivalentsus

Definitsioon 15. *Algebrate muutkonnaks* nimetatakse sama signatuuriga algebraliste struktuuride klassi, mis on defineeritav mingi samasuste hulga abil.

Algebrate muutkonda saab vaadelda kategooriana, mille morfismideks on algebrate homomorfismid.

Näide 16. Kõigi rühmade klass on algebrate muutkond, mille signatuuriks on

$$\Omega = \{1,^{-1}, \cdot\}$$

ja samasusteks

$$(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3),$$
$$1x_1 = x_11 = x_1,$$
$$x_1(x_1)^{-1} = (x_1)^{-1}x_1 = 1.$$

Rühmade muutkonda saab vaadelda kategooriana, mille objektideks on kõik rühmad, morfismideks aga rühmade homomorfismid.

Definitsioon 17. Olgu M mingi algebrate kategooria. Funktorit $F : M \longrightarrow \mathrm{Set}$ nimetatakse *unustavaks funktoriks*, kui ta igale

(i) kategooria M objektile A seab vastavusse hulga A, unustades ära selle struktuuri;

(ii) kategooria M homomorfismile f seab vastavusse hulkade kujutuse f.

Definitsioon 18. Algebrate muutkondi M_1 ja M_2 nimetatakse *ratsionaalselt ekvivalentseteks*, kui leidub selline kategooriate isomorfism $F : M_2 \longrightarrow M_1$, et $U_1F = U_2$, kus $U_1 : M_1 \longrightarrow \mathrm{Set}$ ja $U_2 : M_2 \longrightarrow \mathrm{Set}$ on unustavad funktorid.

Käesolevas töös vaadeldavad kloonid ja operaadid on algebralised struktuurid, millel on mitte üks vaid loenduv hulk põhihulki. Ka need struktuurid defineeritakse samasuste abil, seepärast võime rääkida kloonide muutkonnast ja operaadide muutkonnast. Nende muutkondade ratsionaalne ekvivalentsus defineeritakse analoogiliselt Definitsiooniga 18, ainult kategooria Set asemel kategooriaga Set^{ω}.

2 Abstraktsed kloonid. Operaadid

Selles peatükis esitame abstraktse klooni ja operaadi mõisted koos näidetega.

2.1 Abstraktsed kloonid

Definitsioon 19. Hulkade kogumit $R = \{R(n) \mid n \geqslant 0\}$ nimetatakse *klooniks*, kui iga naturaalarvu n korral eristatakse elemente

$$p_{1,n}, \cdots, p_{n,n} \in R(n),$$

mida nimetatakse projektsioonideks, ja suvaliste täisarvude $m > 0, n \geqslant 0$ korral on defineeritud kompositsioon

$$R(m) \times R(n)^m \to R(n),$$
$$(x, y_1, \cdots, y_m) \mapsto [xy_1 \cdots y_m]$$

(üleskirjutuse $y_1 \cdots y_m$ asemel kasutame tihtipeale lühiduse mõttes tähistust $\bar{y}$), kusjuures peavad olema täidetud järgmised tingimused:

(i) (assotsiatiivsus) iga $x \in R(m)$, $y_i \in R(n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $\bar{z} = z_1 \cdots z_n$, $z_j \in R(k)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, korral

$$[x[y_1\bar{z}] \cdots [y_m\bar{z}]] = [[xy_1 \cdots y_m]\bar{z}];$$

(ii) iga $x \in R(m)$, $y_i \in R(n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, korral

$$[p_{i,m}y_1 \cdots y_m] = y_i,$$
$$[xp_{1,m} \cdots p_{m,m}] = x.$$

Definitsioon 20. Kujutuste kogumit $f = \{f_n \mid n \geqslant 0\}$ nimetatakse *homomorfismiks* kloonist R klooni K, kui $f_n : R(n) \to K(n)$ ning iga $m > 0, n \geqslant 0$ ning kõigi argumentide väärtuste korral

$$f_n([xy_1 \cdots y_m]) = [f_m(x)f_n(y_1) \cdots f_n(y_m)]$$

ja

$$f_n(p_{i,n}) = p_{i,n}.$$

Näide 21. Olgu antud suvaline mittetühi hulk A. Koosnegu mittenegatiivse täisarvu n korral hulk $R(n)$ teatud kujutustest $f : A^n \longrightarrow A$. Projektsioonidena $p_{i,n} : A^n \longrightarrow A$ vaatleme tavalisi projektsioone

$$p_{i,n}(x_1, \ldots, x_n) = x_i,$$

kus $x_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Kujutuste kompositsiooni defineerime

$$[fg_1 \ldots g_m](x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

kus $f \in R(m)$, $g_i \in R(n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $x_j \in A$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Hulk $R = \{R(n)|n \geqslant 0\}$ on kloon hulgal A, kui ta sisaldab kõik projektsioonid ja on kinnine kompositsiooni moodustamise suhtes.

Näide 22. Vähim kloon hulgal A koosneb täpselt kõigist projektsioonidest.

Näide 23. Suurim kloon hulgal A koosneb iga täisarvu $n \geqslant 0$ korral kõigist n-aarsetest kujutustest hulgal A.

Näide 24. Suvalise vektorruumi kõik lineaarsed funktsioonid, see tähendab funktsioonid kujul $f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, kus λ_i on skalaarid, moodustavad klooni.

2.2 Operaadid

Kõigepealt toome sisse mõisted, mis on vajalikud tavaoperaadi definitsiooni esitamiseks. Olgu naturaalarvu n korral Σ_n hulk, mis koosneb kõigist substitutsioonidest hulgal $\{1, 2, \ldots, n\}$. On teada, et Σ_n on substitutsioonide järjestikku rakendamise suhtes rühm. Rühma Σ_n nimetatakse sümmeetriliseks rühmaks.

Definitsioon 25. Olgu $\sigma \in \Sigma_m$ ja $n_1 + \ldots + n_m = n$. Siis $\sigma(n_1, \ldots, n_m) \in \Sigma_n$ on substitutsioon, mis permuteerib m elementide blokki suurusega $n_1, n_2, \ldots, n_m$ samamoodi, nagu $\sigma \in \Sigma_m$ permuteerib m üksikut elementi. Seejuures ühe bloki piires elementide järjestus ei muutu.

Näide 26. Kui

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_3,$$

siis

$$\sigma(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_6.$$

Definitsioon 27. Olgu $\tau_i \in \Sigma_{n_i}$, kus $1 \leqslant i \leqslant m$. Siis $\tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_m \in \Sigma_{n_1+\ldots+n_m}$ ja

$1 \leqslant j \leqslant n_i$ korral

$$(\tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_m)(n_1 + \ldots + n_{i-1} + j) = n_1 + \ldots + n_{i-1} + \tau_i(j).$$

Näide 28. Kui

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_2, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_3,$$

siis

$$\tau_1 \oplus \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \Sigma_5.$$

Definitsioon 29. Olgu G rühm ja X mittetühi hulk. Kujutust

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X, \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

nimetatakse rühma G *vasakpoolseks toimeks* hulgal X, kui:

(i) iga $g, h \in G$ ja $x \in X$ korral

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x);$$

(ii) rühma G ühikelemendi e ja iga $x \in X$ korral

$$e \cdot x = x.$$

Definitsioon 30. Hulkade kogumit $R = \{R(n) | n \geqslant 0\}$ nimetatakse *operaadiks*, kui on fikseeritud element

$$\varepsilon \in R(1),$$

mida nimetatakse ühikelemendiks, ja suvaliste täisarvude $m > 0$, $n_1, \ldots, n_m \geqslant 0$ korral on defineeritud kompositsioon

$$\begin{gathered} R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \to R(n_1 + \cdots + n_m), \\ (x, y_1, \cdots, y_m) \mapsto x y_1 \cdots y_m = x\bar{y}, \end{gathered}$$

kusjuures peavad olema täidetud järgmised tingimused:

(i) (assotsiatiivsus) iga $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $\bar{z}_i = z_{i1} \cdots z_{in_i}$, $z_{i,j} \in R(k_{ij})$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$, korral

$$x(y_1\bar{z}_1) \cdots (y_m\bar{z}_m) = (xy_1 \cdots y_m)\bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m;$$

(ii) iga $x \in R(m)$, $1 \leqslant m$, korral

$$\varepsilon x = x = x\varepsilon \cdots \varepsilon;$$

(iii) iga naturaalarvu n korral rühm Σ_n toimib vasakult hulgal $R(n)$ nii, et iga $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, $\sigma \in \Sigma_m$ ja $\tau_i \in \Sigma_{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, korral

$$x(\tau_1 y_1) \ldots (\tau_m y_m) = (\tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_m)(xy_1 \ldots y_m)$$

ja

$$(\sigma x)y_1 \ldots y_m = \sigma(n_1, \ldots, n_m)(xy_{\sigma(1)} \ldots y_{\sigma(m)}).$$

Definitsioon 31. Kujutuste kogumit $h = \{h_n \mid n \geqslant 0\}$ operaadist R operaadi K nimetatakse *homomorfismiks*, kui $h_n : R(n) \longrightarrow K(n)$, kusjuures kõik diagrammid sümmeetrilise rühma Σ_n substitutsioonidega on kommutatiivsed, ja iga $m > 0, n_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ning kõigi argumentide väärtuste korral

$$h_{n_1+\ldots+n_m}(xy_1 \ldots y_m) = h_m(x)h_{n_1}(y_1) \ldots h_{n_m}(y_m)$$

ja

$$h_1(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Näide 32. Olgu antud suvaline mittetühi hulk A. Koosnegu mittenegatiivse täisarvu n korral hulk $R(n)$ teatud kujutustest $f : A^n \longrightarrow A$. Võtame $\varepsilon \in R(1)$ võrdseks samasusteisendusega hulgal A. Kujutuste kompositsiooni defineerime

$$fg_1 \ldots g_m(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, g_m(x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}, \ldots, x_n)),$$

kus $n_1 + \ldots + n_m = n$, $f \in R(m)$, $g_i \in R(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $x_j \in A$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Toimigu Σ_n hulgal $F(n)$ järgmiselt

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

kus $f \in R(n)$, $\sigma \in \Sigma_n$ ja $x_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Hulk $R = \{R(n) | n \geqslant 0\}$ on operaad hulgal A, kui ta sisaldab ühikelementi ja on kinnine kompositsiooni moodustamise suhtes.

Operaadi definitsiooni esimese ja teise tingimuse kontroll on lihtne. Näitame, et ka kolmandas tingimuses toodud võrdused kehtivad. Selleks kasutame korduvalt antud näites toodud definitsioone

$$
\begin{gathered}
(f(\tau_1 g_1) \ldots (\tau_m g_m))(x_1, \ldots, x_n) \\
= f((\tau_1 g_1)(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, (\tau_m g_m)(x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}, \ldots, x_n)) \\
= f(g_1(x_{\tau_1(1)}, \ldots, x_{\tau_1(n_1)}), \ldots, g_m(x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+\tau_m(1)}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+\tau_m(n_m)})) \\
= (f g_1 \ldots g_m)(x_{\tau_1(1)}, \ldots, x_{\tau_1(n_1)}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+\tau_m(1)}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+\tau_m(n_m)}) \\
= ((\tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_m)(f g_1 \ldots g_m))(x_1, \ldots, x_n).
\end{gathered}
$$

Sellega on kolmanda tingimuse esimene võrdus näidatud, kontrollime teise võrduse kehtivust

$$
\begin{gathered}
((\sigma f) g_1 \ldots g_m)(x_1, \ldots, x_n) \\
= (\sigma f)(g_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, g_m(x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}, \ldots, x_n)) \\
= f(g_{\sigma(1)}(x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(1)-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(1)}}), \ldots, \\
g_{\sigma(m)}(x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(m)-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(m)}})) \\
= (f g_{\sigma(1)} \ldots g_{\sigma(m)})(x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(1)-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(1)}}, \ldots, \\
x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(m)-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{\sigma(m)}}) \\
= \sigma(n_1, \ldots, n_m)(f g_{\sigma(1)} \ldots g_{\sigma(m)})(x_1, \ldots, x_n).
\end{gathered}
$$

Sellega on tavaoperaadi definitsioonis toodud tingimuste kontroll lõpetatud.

3 Verbaalsed kategooriad. W-operaadid

3.1 Kategooria FSet

Tähistame mittenegatiivse täisarvu n korral hulka $\{0, 1, \ldots, n\}$ sümboliga $[n]$. Kategooriaks FSet nimetame sellist kategooriat, mille objektideks on iga mittenegatiivse täisarvu n korral hulk $[n]$ ning morfismideks iga mittenegatiivse täisarvu m ja n korral kõikvõimalikud kujutused $f : [m] \longrightarrow [n]$, mis rahuldavad tingimusi $f(0) = 0$ ja $f^{-1}(0) = \{0\}$. Edaspidi kategooria FSet või tema alamkategooriate morfismide võrdsusi kontrollides me enam nullelemendile eraldi tähelepanu ei pööra.

Paneme tähele, et kategooria FSet igal kahel objektil on olemas kokorrutis, mis on kirjeldatav järgmiselt: objektide $[m]$ ja $[n]$ kokorrutiseks on objekt $[m] \amalg [n] = [m+n]$, objekti $[m]$ sisestuse $\iota_{[m]}$ korral

$$\iota_{[m]}(i) = i \in [m+n],$$

kus $i \in [m]$, ja objekti $[n]$ sisestuse $\iota_{[n]}$ korral

$$\iota_{[n]}(i) = m + i \in [m+n],$$

kus $i \in [n]$.

Lisaks, kujutuste $f : [m] \longrightarrow [p]$ ja $g : [n] \longrightarrow [q]$ korral defineerime kujutuse

$$f \amalg g : [m+n] \longrightarrow [p+q],$$
$$f \amalg g : i \longmapsto f(i),$$

kui $0 \leqslant i \leqslant m$, ja

$$f \amalg g : i \longmapsto p + g(i),$$

kui $m + 1 \leqslant i \leqslant m + n$. Kui f ja g on kategooria FSet morfismid, siis ka $f \amalg g$ on kategooria FSet morfism.

Olgu naturaalarv n esitatud m mittenegatiivse täisarvu summana $n = n_1 + \ldots + n_m$. Siis saame defineerida kategooria FSet mittekahaneva morfismi $\alpha : [n] \longrightarrow [m]$ nii, et arvud $1, \ldots, n_1$ kujutuvad arvuks 1, arvud $n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$ kujutuvad arvuks 2 jne. Vastupidi, iga $1 \leqslant i \leqslant m$ korral

$$\alpha^{-1}(i) = \{n_1 + \ldots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_i\}.$$

Seepärast tähistame edaspidi $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ ja nimetame selliseid kategooria FSet morfisme mittenegatiivse täisarvu n jaotuseks m osaks. Juhul kui $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = k$, siis tähistame $\alpha = (k^m)$.

Tähistame sümboliga P kategooriat, mille objektideks on iga mittenegatiivse täisarvu n korral hulk $[n]$ ja morfismideks iga mittenegatiivse täisarvu m ja n korral kõik arvu n jaotused m osaks. Tähistame fikseeritud m ja n korral nende jaotuste hulka $P(n,m) = P([n],[m])$.

Näide 33. Kui $\alpha = (1,2,0,1)$, siis ta tegutseb $[4] \longrightarrow [4]$ ja

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(1) = 1, \quad \alpha(2) = 2, \quad \alpha(3) = 2, \quad \alpha(4) = 4.$$

3.2 Konservatiivsed ruudud kategoorias FSet

Tähistame sümboliga $[p,q]$, kus $p \leqslant q$, täisarvude hulka $\{p, p+1, \cdots, q\}$. Olgu $\alpha = (n_1, \cdots, n_m) \in P(n,m)$ ja $f : [k] \to [m]$ morfism kategoorias FSet. Vaatleme konservatiivset ruutu

$$\begin{tikzcd}
{[n] \times_{[m]} [k]} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & {[k]} \arrow[d, "f"] \\
{[n]} \arrow[r, "\alpha"] & {[m]}
\end{tikzcd}$$

Selle konservatiivse ruudu struktuuri kirjeldamiseks tõestame järgmise lemma.

Lemma 34. *Kategooria FSet objekt $[n]\times_{[m]}[k]$ on samastatav objektiga $[n_{f(1)}+\cdots+n_{f(k)}]$. Võttes π_2 ossa jaotuse $(n_{f(1)}, \cdots, n_{f(k)})$ ning π_1 ossa kategooria FSet morfismi, mis teisendab iga intervalli $[n_{f(1)} + \cdots + n_{f(j-1)} + 1, n_{f(1)} + \cdots + n_{f(j)}]$ bijektiivselt intervalliks $[n_1 + \cdots + n_{f(j)-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{f(j)}]$, saame konservatiivse ruudu.*

Tõestus. Lemma sõnastuses antud π_1 ja π_2 tegutsemise saame hulga $[n_{f(1)}+\cdots+n_{f(k)}]$ iga nullist erineva elemendi jaoks lahti kirjutada järgmiselt

$$\pi_1(n_{f(1)} + \ldots + n_{f(j-1)} + i) = n_1 + \ldots + n_{f(j)-1} + i$$

ja

$$\pi_2(n_{f(1)} + \ldots + n_{f(j-1)} + i) = j,$$

$1 \leqslant i \leqslant n_{f(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Seega

$$\alpha(\pi_1(n_{f(1)} + \ldots + n_{f(j-1)} + i)) = \alpha(n_1 + \ldots + n_{f(j)-1} + i) = f(j)$$

ning

$$f(\pi_2(n_{f(1)} + \ldots + n_{f(j-1)} + i) = f(j).$$

Järelikult tegemist on kommutatiivse diagrammiga.

Jääb näidata konservatiivse ruudu definitsiooni teise tingimuse täidetus. Olgu $[l]$ kategooria FSet objekt ning $\rho_1 : [l] \longrightarrow [n]$ ja $\rho_2 : [l] \longrightarrow [k]$ sellised kategooria FSet morfismid, et $\rho_1\alpha = \rho_2 f$. Otsime kategooria FSet morfismi $\theta : [l] \longrightarrow [n] \times_{[m]} [k]$, et $\rho_1 = \pi_1\theta$ ja $\rho_2 = \pi_2\theta$.

Olgu $1 \leqslant h \leqslant l$. Siis $\rho_1(h) \in [n]$ ning seejuures leidub $1 \leqslant g \leqslant n_{f(\rho_2(h))}$ nii, et $\rho_1(h) = n_1 + \ldots + n_{f(\rho_2(h))-1} + g$. Viimast saab põhjendada võrdusega $\alpha\rho_1 = f\rho_2$. Nüüd oleme valmis defineerima morfismi θ

$$\theta(h) = n_{f(1)} + \ldots + n_{f(\rho_2(h)-1)} + g.$$

Kontrollime vajalike võrduste kehtivust

$$\pi_1(\theta(h)) = \pi_1(n_{f(1)} + \ldots + n_{f(\rho_2(h)-1)} + g) = n_1 + \ldots + n_{f(\rho_2(h))-1} + g = \rho_1(h)$$

ja

$$\pi_2(\theta(h)) = \pi_2(n_{f(1)} + \ldots + n_{f(\rho_2(h)-1)} + g) = \rho_2(h).$$

Sellega on lemma tõestatud.

□

Tähistame projektsiooni $\pi_2 = (n_{f(1)}, \ldots, n_{f(k)})$ sümboliga αf, projektsiooni π_1 sümboliga $f * \alpha$ ja hulka $[n_{f(1)} + \ldots + n_{f(k)}]$ sümboliga $f * [n]$.

3.3 Verbaalsed kategooriad

Definitsioon 35. Kategooria FSet alamkategooriat W nimetatakse *verbaalseks*, kui on täidetud järgmised tingimused:

(i) $\mathrm{Obj}(W) = \mathrm{Obj}(\mathrm{FSet})$;

(ii) kui $f, g \in \mathrm{Mor}(W)$, siis $f \amalg g \in \mathrm{Mor}(W)$;

(iii) kui $f : [k] \to [m]$ on morfism kategoorias W, siis $f * \alpha \in W(f * [n], [n])$ iga $\alpha \in P(n, m)$.

Toome mõned näited verbaalsetest kategooriatest.

Näide 36. Kategooria Σ, kus $\Sigma([n],[m])$ on tühi, kui $n \neq m$, ja $\Sigma([n],[n]) = \Sigma_n$ iga n korral, on verbaalne. Et olla kooskõlas kategooria FSet definitsiooniga, siis loeme, et iga substitutsioon viib nullelemendi nullelemendiks (samuti Σ_0 koosneb ühest morfismist, mis viib nullelemendi nullelemendiks).

TÕESTUS. Olgu $\sigma \in \Sigma_m, \tau \in \Sigma_n$ ja $\alpha = (n_1, \ldots, n_m) \in P(n,m)$. Näitame, et on täidetud verbaalse kategooria definitsiooni tingimused.

Vastavalt kokorrutise definitsioonile

$$\sigma \amalg \tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m & m+1 & \ldots & m+n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(m) & m+\tau(1) & \ldots & m+\tau(n) \end{pmatrix}.$$

Kuna elemendid

$$\sigma(1), \ldots, \sigma(m), m+\tau(1), \ldots, m+\tau(n)$$

on paarikaupa erinevad, siis $\sigma \amalg \tau \in \Sigma_{m+n}$.

Kasutades Lemmat 34, saame, et

$$\sigma * [n] = [n_{\sigma(1)} + \ldots + n_{\sigma(m)}] = [n_1 + \ldots + n_m] = [n].$$

Seega on vaja näidata, et $\sigma * \alpha \in \Sigma([n],[n])$.

Vastavalt Lemma 34 teisele osale $[n_{\sigma(1)} + \cdots + n_{\sigma(j-1)} + 1, n_{\sigma(1)} + \cdots + n_{\sigma(j)}]$ kujutub bijektiivselt intervalliks $[n_1 + \cdots + n_{\sigma(j)-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{\sigma(j)}]$. Kuna erinevate $1 \leqslant i,j \leqslant m$ korral $\sigma(i)$ ja $\sigma(j)$ on erinevad, siis intervallid $[n_1 + \cdots + n_{\sigma(j)-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{\sigma(j)}]$ on erinevate j korral lõikumatud. Seega $\sigma * \alpha$ on bijektsioon ehk $\sigma * \alpha \in \Sigma([n],[n])$.

Näide 37. Kategooria FSet on samuti verbaalne.

TÕESTUS. Olgu $f : [k] \to [m]$, $g : [p] \to [q]$ ja $\alpha = (n_1, \ldots, n_m) \in P(n,m)$. Kuna kategooria FSet morfismide hulk koosneb kõikvõimalikest kujutustest tema objektide vahel, siis ka $f \amalg g : [k+p] \to [m+q]$ ja $\alpha * f : f * [n] \to n$ on kategooria FSet morfismideks.

3.4 W-operaadid

Definitsioon 38. Olgu W verbaalne kategooria. Funktorit $R : W \longrightarrow \mathrm{Set}$ nimetatakse *W-operaadiks*, kui on fikseeritud element

$$\varepsilon \in R([1]),$$

mida nimetatakse ühikelemendiks, ja suvaliste täisarvude $m > 0$, $n_1, \ldots, n_m \geqslant 0$ korral on defineeritud kompositsioon

$$R([m]) \times R([n_1]) \times \cdots \times R([n_m]) \to R([n_1 + \cdots + n_m]),$$
$$(x, y_1, \cdots, y_m) \mapsto xy_1 \cdots y_m = x\bar{y}$$

nii, et täidetud on järgmised tingimused:

(i) (assotsiatiivsus) iga $x \in R([m])$, $y_i \in R([n_i])$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $\bar{z}_i = z_{i1} \cdots z_{in_i}$, $z_{ij} \in R([k_{ij}])$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$, korral

$$x(y_1\bar{z}_1) \cdots (y_m\bar{z}_m) = (xy_1 \cdots y_m)\bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m;$$

(ii) iga $x \in R([m])$, $1 \leqslant m$, korral

$$\varepsilon x = x = x\varepsilon \cdots \varepsilon;$$

(iii) kui $f_i : [n_i] \longrightarrow [k_i]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, on morfismid kategoorias W, $x \in R([m])$ ja $y_i \in R([n_i])$, siis kehtib

$$x(R(f_1)(y_1)) \cdots (R(f_m)(y_m)) = (R(f_1) \amalg \cdots \amalg R(f_m))(xy_1 \cdots y_m);$$

(iv) kui $f : [k] \to [m]$ on morfism kategoorias W, $\alpha = (n_1, \cdots, n_m) \in P(n, m)$, $x \in R([k])$, ja $y_i \in R([n_i])$, $1 \leqslant i \leqslant m$, siis kehtib

$$(R(f)(x))y_1 \cdots y_m = R(f * \alpha)(xy_{f(1)} \cdots y_{f(k)}).$$

Edaspidi kirjutame lühiduse mõttes $R([n])$ asemele $R(n)$ ja $R(f)(x)$ asemele fx. Samuti tähistame vastavalt kontekstile sümboliga R nii funktorit kui ka hulkade kogumit $R = \{R(n) | n \geqslant 0\}$, sest sisuliselt nad tähistavad ühte ja sama asja.

Definitsioon 39. Funktorite loomulikku teisendust $h = \{h_n \mid n \geqslant 0\}$ W-operaadist R W-operaadi K nimetatakse W-operaadide *homomorfismiks*, kui $h_n : R(n) \longrightarrow K(n)$ ja on täidetud järgmised 2 tingimust: iga $m > 0, n_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ning kõigi argumentide väärtuste korral

$$h_{n_1+\ldots+n_m}(xy_1 \ldots y_m) = h_m(x)h_{n_1}(y_1) \ldots h_{n_m}(y_m)$$

ja

$$h_1(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Näide 40. Olgu antud suvaline mittetühi hulk A. Vaatleme funktorit verbaalsel kategoorial FSet, mis seab hulgale $[n]$ vastavusse kõigi n-aarsete kujutuste hulga hulgal A ning kategooria FSet morfismi $\sigma : [n] \longrightarrow [m]$, $f \in R(n)$ ja $\bar{x} = x_1 \dots x_m$ korral

$$(\sigma f)(\bar{x}) = f(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}).$$

On kergesti kontrollitav, et kovariantse funktori definitsiooni tingimused on täidetud.

Esimese ja teise tingimuse täidetus on ilmne. Näitame kolmanda ja neljanda tingimuse täidetust. Olgu $\sigma_i : [n_i] \longrightarrow [k_i]$ kategooria FSet morfismid, $f \in R(m)$, $g_i \in R(n_i)$ ja $x_1, \dots, x_{k_1+\dots+k_m} \in A$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Kolmanda omaduse tõestame, kasutades eelnevalt defineeritud kokorrutist

$$\begin{aligned}
&f(\sigma_1 g_1) \dots (\sigma_m g_m)(x_1, \dots, x_{k_1+\dots+k_m}) \\
&= f((\sigma_1 g_1)(x_1, \dots, x_{k_1}), \dots, (\sigma_m g_m)(x_{k_1+\dots+k_{m-1}+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_m})) \\
&= f(g_1(x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(n_1)}), \dots, g_m(x_{k_1+\dots+k_{m-1}+\sigma_m(1)}, \dots, x_{k_1+\dots+k_{m-1}+\sigma_m(n_m)})) \\
&= (f g_1 \dots g_m)(x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(n_1)}, \dots, x_{k_1+\dots+k_{m-1}+\sigma_m(1)}, \dots, x_{k_1+\dots+k_{m-1}+\sigma_m(n_m)}) \\
&= ((\sigma_1 \amalg \dots \amalg \sigma_m)(f g_1 \dots g_m))(x_1, \dots, x_{k_1+\dots+k_m}).
\end{aligned}$$

Olgu $\sigma : [k] \longrightarrow [m]$ kategooria FSet morfism, $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in P(n, m)$, $f \in R(k)$, $g_i \in R(n_i)$ ja $x_1, \dots, x_{n_1+\dots+n_m} \in A$, kus $1 \leqslant i \leqslant m$. Neljanda tingimuse tõestuses kasutame Lemmas 34 öeldut $\sigma * \alpha$ jaoks

$$\begin{aligned}
&((\sigma f) g_1 \dots g_m)(x_1, \dots, x_{n_1+\dots+n_m}) \\
&= (\sigma f)(g_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, g_m(x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_m})) \\
&= f(g_{\sigma(1)}(x_{n_1+\dots+n_{\sigma(1)-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{\sigma(1)}}), \dots, \\
&\qquad g_{\sigma(k)}(x_{n_1+\dots+n_{\sigma(k)-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{\sigma(k)}})) \\
&= (f g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(k)})(x_{n_1+\dots+n_{\sigma(1)-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{\sigma(1)}}, \dots, \\
&\qquad x_{n_1+\dots+n_{\sigma(k)-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{\sigma(k)}}) \\
&= (f g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(k)})(x_{\sigma*\alpha(1)}, \dots, x_{\sigma*\alpha(n_{\sigma(1)})}, \dots, \\
&\qquad x_{\sigma*\alpha(n_{\sigma(1)}+\dots+n_{\sigma(k-1)+1})}, \dots, x_{\sigma*\alpha(n_{\sigma(1)}+\dots+n_{\sigma(k)})}) \\
&= ((\sigma * \alpha)(f g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(k)}))(x_1, \dots, x_{n_1+\dots+n_m}).
\end{aligned}$$

Sellega on W-operaadi definitsiooni kolmas ja neljas tingimus kontrollitud.

4 Operaadide ja kloonide vahelised seosed

4.1 Tavaoperaadide ja W-operaadide vaheline seos

Selles osas vaatleme abstraktsete kloonide, tavaoperaadide ja W-operaadide kategooriaid, mille objektideks on vastavalt kõikvõimalikud abstraktsed kloonid, tavaoperaadid ja W-operaadid ning morfismideks nendevahelised homomorfismid.

Teoreem 41. *Σ-operaadide kategooria on ratsionaalselt ekvivalentne tavaoperaadide kategooriaga.*

TÕESTUS. Sisuliselt on Σ-operaadide ja tavaoperaadide korral sama asi üles kirjutatud mõningal määral erinevate tähistustega.

Tavaoperaadi võib samuti vaadata funktorina verbaalsel kategoorial Σ, seades hulgale $[n]$ vastavusse hulga $R(n)$ ning morfismi $\sigma \in \Sigma_n$ ja $x \in R(n)$ korral $R(\sigma)(x)$ lugeda võrdseks σ toimega elemendil x. Kovariantse funktori definitsiooni tingimused on täidetud tänu vasakpoolse toime definitsioonis nõutule.

Tavaoperaadi ja W-operaadi definitsioonis

$$\tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_m = \tau_1 \amalg \ldots \amalg \tau_m,$$

sest mõlemad teisendavad $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$ korral

$$n_1 + \ldots + n_{i-1} + j \longmapsto n_1 + \ldots + n_{i-1} + \tau_i(j).$$

Samuti

$$\sigma(n_1, \ldots, n_m) = \sigma * \alpha.$$

Põhjendame seda: morfismi $\sigma * \alpha$ korral vastavalt Lemmale 34 esimesed $n_{\sigma(1)}$ elementi teisenevad intervalliks $[n_1 + \ldots + n_{\sigma(1)-1} + 1, n_1 + \ldots + n_{\sigma(1)}]$, järgmised $n_{\sigma(2)}$ elementi intervalliks $[n_1 + \ldots + n_{\sigma(2)-1} + 1, n_1 + \ldots + n_{\sigma(2)}]$ jne. Morfism $\sigma * \alpha$ permuteerib intervallid $[1, n_1], [n_1 + 1, n_1 + n_2], \ldots, [n_1 + \ldots + n_{m-1} + 1, n_1 + \ldots + n_m]$ niimoodi, nagu σ permuteerib m üksikut elementi. Seega intervallide uueks järjekorraks on $[n_1 + \ldots + n_{\sigma(1)-1} + 1, n_1 + \ldots + n_{\sigma(1)}]$, $[n_1 + \ldots + n_{\sigma(2)-1} + 1, n_1 + \ldots + n_{\sigma(2)}]$ jne. Niimoodi arutledes olemegi saanud kujutuste võrdsuse.

Kuna operaadid ja Σ-operaadid langevad kokku, siis langevad kokku ka nende homomorfismid: et h_n korral kõik diagrammid sümmeetrilise rühma Σ_n substitutsioonidega on kommutatiivsed, tähendabki seda, et h on loomulik teisendus Σ-operaadist R Σ-operaadi K. Sellega oleme näidanud, et operaadide ja Σ-operaadide puhul on tegemist sama mõistega, mis erinevad ainult üleskirjutuse poolest. $\square$

4.2 Abstraktsete kloonide ja W-operaadide vaheline seos

Teoreem 42. *Abstraktsete kloonide kategooria on ratsionaalselt ekvivalentne FSet-operaadide kategooriaga.*

TÕESTUS. Selle teoreemi tõestamiseks näitame kõigepealt, et FSet-operaadi struktuur hulkade kogumil R määratleb ära abstraktse klooni struktuuri samal kogumil R ning et FSet-operaadide homomorfism on sellisel juhul ka vastavate kloonide homomorfism. Seejuures märgime ära, et konstrueeritud funktor rahuldab ratsionaalse ekvivalentsuse definitsioonis toodud võrdust. Siis näitame ka vastupidi, et abstraktse klooni struktuur hulkade kogumil R määratleb ära FSet-operaadi struktuuri samal kogumil R ning et abstraktsete kloonide homomorfism on ka vastavate FSet-operaadide homomorfism. Viimasena kontrollime, et konstrueeritud funktorid oleksid teineteise pöördfunktorid.

Defineerime funktori F, mis tegutseb FSet-operaadide kategooriast abstraktsete kloonide kategooriasse. Olgu antud mingi FSet-operaad R. Defineerime tema kompositsioonitehte ja ühikelemendi abil samal hulkade kogumil R klooni struktuuri. Selleks vaatleme sellist kategooria FSet morfismi $\mu_{m,n} : [nm] \longrightarrow [n]$, et iga $1 \leqslant i \leqslant m$ ja $1 \leqslant j \leqslant n$ korral

$$\mu_{m,n}(n(i-1)+j) = j.$$

Kompositsiooni operatsiooni kloonis defineerime kujutuste

$$R(m) \times R(n)^m \longrightarrow R(nm) \xrightarrow{\mu_{m,n}} R(n)$$

korrutisena, kus vasakpoolne nool vastab kompositsiooni operatsioonile FSet-operaadis R. Teisisõnu,

$$[xy_1 \dots y_m] = \mu_{m,n}(xy_1 \dots y_m). \tag{1}$$

Projektsioonide defineerimiseks vaatleme kategooria FSet morfismi $p_i^n : [1] \to [n]$, mis viib elemendi 1 elemendiks $i \in [n]$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Temale vastav kujutus FSet-operaadi korral on $p_i^n : R(1) \to R(n)$. Klooni projektsiooni defineerime siis valemiga

$$p_{i,n} = p_i^n \varepsilon \in R(n). \tag{2}$$

Kontrollime klooni definitsioonis olevate tingimuste täidetust, alustame assotsiatiivsusega. Olgu $x \in R(m)$, $y_i \in R(n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $\bar{z} = z_1 \cdots z_n$, $z_j \in R(k)$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Kasutades seost (1) ning W-operaadi definitsiooni tingimusi 3 ja 1, saame

$$\begin{aligned}[x[y_1\bar{z}]\dots[y_m\bar{z}]] &= \mu_{m,k}(x[y_1\bar{z}]\dots[y_m\bar{z}]) = \mu_{m,k}(x(\mu_{n,k}(y_1\bar{z}))\dots(\mu_{n,k}(y_m\bar{z})))\\ &= \mu_{m,k}(\mu_{n,k}\amalg\dots\amalg\mu_{n,k})(x(y_1\bar{z})\dots(y_m\bar{z}))\\ &= \mu_{m,k}(\mu_{n,k}\amalg\dots\amalg\mu_{n,k})((xy_1\dots y_m)\bar{z}\dots\bar{z}).\end{aligned}$$

Viimases avaldises korduvad $\mu_{n,k}$ ja $\bar{z} = z_1\dots z_n$ m korda. Kasutades seost (1) ja W-operaadi definitsiooni neljandat tingimust, saame teist võrduse poolt teisendades

$$\begin{aligned}[[xy_1\dots y_m]\bar{z}] &= [(\mu_{m,n}(xy_1\dots y_m))\bar{z}] = \mu_{n,k}((\mu_{m,n}(xy_1\dots y_m))\bar{z})\\ &= \mu_{n,k}(\mu_{m,n}*\alpha)((xy_1\dots y_m)z_{\mu_{m,n}(1)}\dots z_{\mu_{m,n}(nm)})\\ &= \mu_{n,k}(\mu_{m,n}*\alpha)((xy_1\dots y_m)\bar{z}\dots\bar{z}).\end{aligned}$$

Siin $\alpha = (k^n) \in P(nk,k)$. Viimases avaldises on $\bar{z}$ järjest kirjutatud m korral ning see järeldub vahetule $\mu_{m,n}$ definitsioonist. Assotsiatiivsuse tõestamiseks tuleb seega näidata, et

$$\mu_{m,k}(\mu_{n,k}\amalg\dots\amalg\mu_{n,k}) = \mu_{n,k}(\mu_{m,n}*\alpha).$$

Selleks paneme tähele lihtsasti kontrollitavat fakti, et kategooria FSet objekti $[n]$, morfismi $\mu_{m,n} : [nm] \longrightarrow [n]$ ja jaotuse $\alpha = (k^n) : [kn] \longrightarrow [n]$ korral Lemma 34 konservatiivne ruut võtab järgmise kuju

$$\begin{tikzcd}
[knm] \arrow[r, "(k^{nm})"] \arrow[d, "\mu_{m,kn}"'] & [nm] \arrow[d, "\mu_{m,n}"] \\
[kn] \arrow[r, "(k^n)=\alpha"'] & [n]
\end{tikzcd}.$$

Järelikult $(\mu_{m,n})*\alpha$ definitsioon annab, et $(\mu_{m,n})*(k^n) = \mu_{m,kn}$.

Seega jääb assotsiatiivsuse näitamiseks tõestada, et

$$\mu_{m,k}(\mu_{n,k}\amalg\dots\amalg\mu_{n,k}) = \mu_{n,k}\mu_{m,kn}.$$

Tõepoolest, võrduse vasakul pool oleva kujutuste korrutise korral

$$\begin{aligned}&\mu_{m,k}((\mu_{n,k}\amalg\dots\amalg\mu_{n,k})(kn(h-1)+(k(i-1)+j)))\\ &= \mu_{m,k}(k(h-1)+\mu_{n,k}(k(i-1)+j)) = \mu_{m,k}(k(h-1)+j) = j\end{aligned}$$

ning paremal pool oleva kujutuste korrutise korral

$$\mu_{n,k}(\mu_{m,kn}(kn(h-1)+(k(i-1)+j)))=\mu_{n,k}(k(i-1)+j)=j,$$

kus $1\leqslant h\leqslant m$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant k$. Sellega on lõppenud assotsiatiivsuse kontroll.

Teiseks peame kontrollima kahte klooni projektsioonidega seotud tingimusi. Olgu $x\in R(m)$. Kasutades W-operaadi definitsiooni tingimusi 3 ja 2, saame

$$\begin{aligned}[][xp_{1,m}\dots p_{m,m}]&=\mu_{m,m}(x(p_1^m\varepsilon)\dots(p_m^m\varepsilon))\\ &=\mu_{m,m}(p_1^m\amalg\dots\amalg p_m^m)(x\varepsilon\dots\varepsilon)=\mu_{m,m}(p_1^m\amalg\dots\amalg p_m^m)(x).\end{aligned}$$

Otsitav võrdus kehtib, kui $\mu_{m,m}(p_1^m\amalg\dots\amalg p_m^m)=1_{[m]}$. Tõepoolest,

$$\mu_{m,m}((p_1^m\amalg\dots\amalg p_m^m)(i))=\mu_{m,m}(m(i-1)+p_i^m(1))=\mu_{m,m}(m(i-1)+i)=i,$$

kus $1\leqslant i\leqslant m$. Sellega on esimese projektsioonidega seotud tingimuse kehtivus näidatud.

Näitame ka teise projektsioonidega seotud tingimuse täidetust. Olgu nüüd $\alpha=(n^m)$ ja $y_i\in R(n)$, $1\leqslant i\leqslant m$. Kasutades W-operaadi definitsiooni tingimust 4, saame

$$\begin{aligned}[][p_{i,m}y_1\dots y_m]&=\mu_{m,n}((p_i^m\varepsilon)y_1\dots y_m)=\mu_{m,n}((p_i^m)*\alpha)(\varepsilon y_{p_i^m(1)})\\ &=\mu_{m,n}((p_i^m)*\alpha)(\varepsilon y_i)=\mu_{m,n}((p_i^m)*\alpha)(y_i).\end{aligned}$$

Otsitav võrdus kehtib, kui $\mu_{m,n}((p_i^m)*(n^m))=1_{[n]}$. Lemma (34) ja $\mu_{m,n}$ definitsiooni põhjal

$$\mu_{m,n}(((p_i^m)*(n^m))(j))=\mu_{m,n}(n(i-1)+j)=j,$$

kus $1\leqslant j\leqslant n$. Sellega on lõppenud FSet-operaadi R abil klooni konstrueerimine samal hulkade kogumil R ehk me oleme igale FSet-operaadide kategooria objektile vastavusse seadnud abstraktsete kloonide kategooria objekti.

Nüüd seame igale FSet-operaadide kategooria morfismile vastavusse abstraktsete kloonide kategooria morfismi. Näitame, et kui $h:R\to K$ on FSet-operaadide homomorfism, siis sama kogum h on ka kloonide homomorfism ehk võtame $Fh=h$. Selleks kasutame W-operaadide homomorfismi definitsioonis toodud kahte tingimust ja asjaolu, et h on funktorite R ja K vaheline loomulik teisendus

$$\begin{aligned}h_n([xy_1\dots y_m])&=h_n(\mu_{m,n}(xy_1\dots y_m))=\mu_{m,n}(h_{mn}(xy_1\dots y_m))\\ &=\mu_{m,n}(h_m(x)h_n(y_1)\dots h_n(y_m))=[h_m(x)h_n(y_1)\dots h_n(y_m)]\end{aligned}$$

ja

$$h_n(p_{i,n}) = h_n(p_i^n \varepsilon) = p_i^n(h_1 \varepsilon) = p_i^n \varepsilon.$$

Sellega on lõppenud kovariantse funktori F konstruktsioon FSet-operaadide kategooriast abstraktsete kloonide kategooriasse. Funktori F konstruktsiooni põhjal on selge, et kui U_O ja U_C on unustavad funktorid vastavalt FSet-operaadide ja abstraktsete kloonide kategooriast kategooriasse Set^ω, siis $U_C F = U_O$.

Nüüd konstrueerime funktorile F vastupidise funktori G abstraktsete kloonide kategooriast FSet-operaadide kategooriasse. Olgu K abstraktne kloon. Kasutades klooni kompositsiooni ja projektsioone, konstrueerime kogumil K FSet-operaadi. Selleks seame kategooria FSet igale objektile $[n]$ vastavusse hulga $K(n)$ ning kategooria FSet morfismi $f : [n] \to [m]$ ja $x \in K(n)$ korral defineerime

$$fx = [xp_{f(1),m} \dots p_{f(n),m}] \in K(m). \tag{3}$$

Kontrollime, et tegemist on kovariantse funktoriga. Olgu antud veel üks morfism $g : [m] \to [k]$ kategoorial FSet. Esiteks näitame, et $g(fx) = (gf)x$. Selleks kirjutame lahti võrduse vasaku poole

$$\begin{aligned} g(fx) &= [[xp_{f(1),m} \dots p_{f(n),m}]p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k}] \\ &= [x[p_{f(1),m}(p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k})] \dots [p_{f(n),m}(p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k})]]. \end{aligned}$$

Siin kasutasime seost (3) ja kloonide assotsiatiivsust. Kuna

$$[p_{f(i),m}(p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k})] = p_{g(f(i)),k},$$

siis eeltoodu on võrdne avaldisega $(gf)x$. Seose (3) ja klooni definitsiooni abil saame ka

$$1_{[n]}x = [xp_{1,n} \dots p_{n,n}] = x.$$

Seega on kovariantseks funktoriks olemine kontrollitud ning tuleb näidata, et antud funktor rahuldab W-operaadi definitsioonis toodud tingimusi.

Nüüd tõestame ühe seose ja defineerime abikujutused, mis on vajalikud edasise tõestuse läbiviimiseks. Olgu $x \in K(m)$, $y_i \in K(n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $f : [n] \to [k]$ kategooria FSet morfism. Siis

$$[x(fy_1) \dots (fy_m)] = f[xy_1 \dots y_m]. \tag{4}$$

Tõepoolest, kui tähistame $\bar{p} = p_{f(1),k} \ldots p_{f(n),k}$, siis

$$[x(fy_1)\ldots(fy_m)] = [x[y_1\bar{p}]\ldots[y_m\bar{p}]] = [[xy_1\ldots y_m]\bar{p}] = f[xy_1\ldots y_m].$$

Olgu $\alpha = (n_1, \ldots, n_m) \in P(n, m)$. Defineerime $1 \leqslant i \leqslant m$ korral kujutused

$$\begin{aligned} r_i = r_i(\alpha) : [n_i] &\to [n_1 + \ldots + n_m] = [n], \\ j &\longmapsto n_1 + \ldots + n_{i-1} + j, \end{aligned}$$

$1 \leqslant j \leqslant n_i$. Kui iga $1 \leqslant i \leqslant m$ korral on antud kategooria FSet morfism $f_i : [n_i] \to [k_i]$ ja $\beta = (k_1, \ldots, k_m)$, siis on lihtsasti kontrollitav, et järgmine diagramm on kommutatiivne,

$$\begin{tikzcd} {[n_i]} \arrow[r, "r_i(\alpha)"] \arrow[d, "f_i"'] & {[n_1 + \ldots + n_m]} \arrow[d, "\amalg_{j=1}^m f_j"] \\ {[k_i]} \arrow[r, "r_i(\beta)"'] & {[k_1 + \ldots + k_m]} \end{tikzcd} \quad . \tag{5}$$

Olgu edaspidi $x \in K(m)$, $y_i \in K(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $n = n_1 + \ldots + n_m$. Nüüd oleme valmis defineerima kloonile K vastava FSet-operaadi kompositsiooni, kasutades seejuures seost (3)

$$xy_1 \ldots y_m = [x(r_1y_1)\ldots(r_my_m)] \tag{6}$$
$$= [x[y_1p_{r_1(1),n}\ldots p_{r_1(n_1),n}]\ldots[y_mp_{r_m(1),n}\ldots p_{r_m(n_m),n}]]$$
$$= [x[y_1p_{1,n}\ldots p_{n_1,n}]\ldots[y_mp_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1,n}\ldots p_{n,n}]]. \tag{7}$$

Esiteks näitame, et kehtib W-operaadi definitsioonis toodud kolmas tingimus, kasutades selleks eelnevalt toodud kommutatiivset diagrammi (5) ning seost (4)

$$\begin{aligned} x(f_1y_1)\ldots(f_my_m) &= [x(r_1(\beta)f_1y_1)\ldots(r_m(\beta)f_my_m)] \\ &= [x((\amalg f_i)r_1(\alpha)y_1)\ldots((\amalg f_i)r_m(\alpha)y_m)] \\ &= (\amalg f_i)[x(r_1(\alpha)y_1)\ldots(r_m(\alpha)y_m)] = (f_1 \amalg \ldots \amalg f_m)(xy_1\ldots y_m). \end{aligned}$$

Järgmisena kontrollime W-operaadi definitsiooni neljandat tingimust. Olgu $x \in K(k)$, $y_i \in K(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $f : [k] \to [m]$ morfism kategoorias FSet, tähistame $\alpha = (n_1, \ldots, n_m)$, $r_i = r_i(\alpha)$ ja $\bar{z} = (r_1y_1)\ldots(r_my_m)$. Kasutades seost (3), kloonide assotsiatiivsust ning seejärel projektsioonide omadusi, saame

$$(fx)y_1 \dots y_m = [(fx)\bar{z}] = [[xp_{f(1),m} \dots p_{f(k),m}]\bar{z}]$$
$$= [x[p_{f(1),m}\bar{z}] \dots [p_{f(k),m}\bar{z}]] = [x(r_{f(1)}x_{f(1)}) \dots (r_{f(k)}x_{f(k)})].$$

Lemma 34 põhjal $\alpha f = (n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$, mida kasutades saame näidata

$$r_{f(i)}(\alpha) = (f * \alpha) r_i(\alpha f). \tag{8}$$

Kontrollime seda: esiteks mõlemad kujutused tegutsevad $[n_{f(i)}] \to [n_1 + \dots + n_m]$ ning

$$r_{f(i)}(\alpha)(j) = n_1 + \dots + n_{f(i)-1} + j$$

ja Lemma 34 põhjal ka

$$(f * \alpha)(r_i(\alpha f)(j)) = (f * \alpha)(n_{f(1)} + \dots + n_{f(i-1)} + j) = n_1 + \dots + n_{f(i)-1} + j,$$

$1 \leqslant j \leqslant n_{f(i)}$. Kasutades nüüd seoseid (8),(4) ja (6), saamegi

$$[x(r_{f(1)}y_{f(1)}) \dots (r_{f(k)}y_{f(k)})] = [x((f * \alpha)r_1(\alpha f)y_{f(1)}) \dots ((f * \alpha)r_k(\alpha f)y_{f(k)})]$$
$$= (f * \alpha)[x(r_1(\alpha f)y_{f(1)}) \dots (r_k(\alpha f)y_{f(k)})] = (f * \alpha)(xy_{f(1)} \dots y_{f(k)}).$$

Sellega on lõppenud W-operaadi neljanda tingimuse kontroll.

Siin kohal näitame ka sarnase võrduse kehtivust abstraktsete kloonide korral – seda läheb meil hiljem vaja assotsiatiivsuse näitamisel. Iga $x \in K(k)$, $x_i \in K(n)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, ja kategooria FSet morfismi $f : [k] \longrightarrow [m]$ korral kehtib võrdus

$$[(fx)x_1 \dots x_m] = [xx_{f(1)} \dots x_{f(k)}]. \tag{9}$$

Tõepoolest, kasutades seost (3) ja abstraktse klooni definitsiooni tingimusi, saame

$$[(fx)x_1 \dots x_m] = [[xp_{f(1),m} \dots p_{f(k),m}]x_1 \dots x_m]$$
$$= [x[p_{f(1),m}x_1 \dots x_m] \dots [p_{f(k),m}x_1 \dots x_m]] = [xx_{f(1)} \dots x_{f(k)}].$$

Ühikelemendiks vaadeldavas FSet-operaadis võtame $\varepsilon = p_{1,1} \in K(1)$. Kontrollime W-operaadi definitsioonis ühikelemendiga seotud tingimuste täidetust. Seose (7) ja klooni projektsioonide omaduse põhjal

$$\varepsilon x = [p_{1,1}[xp_{1,n} \dots p_{n,n}]] = [p_{1,1}x] = x.$$

ning

$$x\varepsilon\dots\varepsilon = [x[p_{1,1}p_{1,n}]\dots[p_{1,1}p_{n,n}]] = [xp_{1,n}\dots p_{n,n}] = x.$$

FSet-operaadi konstruktsiooni lõpetamiseks jääb veel kontrollida kompositsiooni assotsiatiivsust. Olgu $x \in K(m)$, $y_i \in K(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ja $\bar{z}_i = (z_{i1}\dots z_{in_i})$, $z_{ij} \in K(k_{ij})$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Tähistame

$$\begin{gathered}
k_i = k_{i1} + \dots + k_{in_i}, 1 \leqslant i \leqslant m, \\
\beta = (k_1, \dots, k_m), r_i = r_i(\beta) : [k_i] \to [k_1 + \dots + k_m], \\
\beta_i = (k_{i1}, \dots, k_{in_i}), r_{ij} = r_{ij}(\beta_i) : [k_{ij}] \to [k_i], \\
\alpha = (n_1, \dots, n_m),\ r'_i = r_i(\alpha) : [n_i] \to [n_1 + \dots + n_m], \\
\gamma = (k_{11}, \dots, k_{1n_1}, \dots, k_{m1}, \dots, k_{mn_m}), r'_{ij} = r_{ij}(\gamma) : [k_{ij}] \to [\Sigma_{i,j} k_{ij}].
\end{gathered}$$

Näitame, et nende tähistuste juures $r'_{ij} = r_i r_{ij}$. Tõepoolest, $1 \leqslant l \leqslant k_{ij}$ korral

$$\begin{aligned}
r'_{ij}(l) &= k_{11} + \dots + k_{1n_1} + \dots + k_{i-1,1} + \dots + k_{i-1,n_{i-1}} + k_{i1} + \dots k_{i,j-1} + l \\
&= k_1 + \dots + k_{i-1} + k_{i1} + \dots + k_{i,j-1} + l
\end{aligned}$$

ja

$$r_i(r_{ij}(l)) = r_i(k_{i1} + \dots + k_{i,j-1} + l) = k_1 + \dots + k_{i-1} + k_{i1} + \dots + k_{i,j-1} + l.$$

Lühendame tähistusi, kirjutades $(r'_{i1}z_{i1})\dots(r'_{in_i}z_{in_i})$ asemel $\bar{r}'_i\bar{z}_i$ ja $(\bar{r}'_1\bar{z}_1)\dots(\bar{r}'_m\bar{z}_m)$ asemel $\bar{z}$. Samuti toome sisse tähistuse, kus kujutuse $f : [p] \to [q]$ ja $\bar{a} = a_1\dots a_q$ korral $\bar{a}f = a_{f(1)}\dots a_{f(p)}$. Nende tähistuste korral

$$\bar{z}r'_i = (r'_{i1}z'_{i1})\dots(r'_{in_i}z'_{in_i}) = \bar{r}'_i\bar{z}_i.$$

Veelgi enam, võrdus (9) on antud tähistustes kirjutatav kujul $[(fa)\bar{b}] = [a(\bar{b}f)]$. Kasutades seoseid (6), (4), äsja sissetoodud tähistusi, seost (9) ja abstraktsete kloonide assotsiatiivsust, saame näidata W-operaadi definitsioonis assotsiatiivsusega seotud tingimuse täidetust

$$\begin{aligned}
x(y_1\bar{z}_1)\dots(y_m\bar{z}_m) &= [x(r_1(y_1\bar{z}_1))\dots(r_m(y_m\bar{z}_m))] \\
&= [x(r_1[y_1(r_{11}z_{11})\dots(r_{1n_1}z_{1n_1})])\dots(r_m[y_m(r_{m1}z_{m1})\dots(r_{mn_m}z_{mn_m})])] \\
&= [x[y_1(r_1r_{11})z_{11}\dots(r_1r_{1n_1})z_{1n_1}]\dots[y_m(r_mr_{m1})z_{m1}\dots(r_mr_{mn_m})z_{mn_m}]] \\
&= [x[y_1(r'_{11}z_{11})\dots(r'_{1n_1}z_{1n_1})]\dots[y_m(r'_{m1}z_{m1})\dots(r'_{mn_m}z_{mn_m})]]
\end{aligned}$$

$$= [x[y_1(\bar{r}'_1\bar{z}_1)]\dots[y_m(\bar{r}'_m\bar{z}_m)]] = [x[y_1(\bar{z}r'_1)]\dots[y_m(\bar{z}r'_m)]]$$
$$= [x[(r'_1y_1)\bar{z}]\dots[(r'_my_m)\bar{z}]] = [[x(r'_1y_1)\dots(r'_my_m)]\bar{z}]$$
$$= [[x(r'_1y_1)\dots(r'_my_m)](\bar{r}'_1\bar{z}_1)\dots(\bar{r}'_m\bar{z}_m)] = (xy_1\dots y_m)(\bar{z}_1\dots\bar{z}_m).$$

Sellega on FSet-operaadide assotsiatiivsus tõestatud ning lõppenud abstraktse klooni K alusel FSet-operaadi konstrueerimine samal hulkade kogumil K ehk me oleme igale abstraktsete kloonide kategooria objektile vastavusse seadnud FSet-operaadide kategooria objekti.

Nüüd seame igale abstraktsete kloonide kategooria morfismile vastavusse FSet-operaadide kategooria morfismi. Näitame, et kui $f : R \longrightarrow K$ on abstraktsete kloonide homomorfism, siis sama kogum f on ka FSet-operaadide homomorfism ehk võtame $Gf = f$. Selleks kasutame abstraktsete kloonide homomorfismi definitsiooni ning seost (3). Olgu $x \in R(n)$ ja $r : [n] \longrightarrow [m]$ kategooria FSet morfism. Kujutuste kogum f on funktorite R ja K loomulik teisendus

$$f_m(rx) = f_m([xp_{r(1),m}\dots p_{r(n),m}]) = [f_n(x)f_m(p_{r(1),m})\dots f_m(p_{r(n),m})]$$
$$= [f_n(x)p_{r(1),m}\dots p_{r(n),m}] = r(f_n(x)).$$

Jääb veel kontrollida definitsioonis toodud kahe tingimuse täidetus

$$f_{n_1+\dots+n_m}(xy_1\dots y_m) = f_{n_1+\dots+n_m}[x(r_1y_1)\dots(r_my_m)]$$
$$= [f_m(x)f_{n_1+\dots+n_m}(r_1y_1)\dots f_{n_1+\dots+n_m}(r_my_m)]$$
$$= [f_m(x)(r_1(f_{n_1}(y_1)))\dots(r_m(f_{n_m}(y_m)))]$$
$$= f_m(x)f_{n_1}(y_1)\dots f_{n_m}(y_m)$$

ja

$$f_1(\varepsilon) = f_1(p_{1,1}) = p_{1,1} = \varepsilon.$$

Sellega oleme defineerinud funktori G abstraktsete kloonide kategoorias FSet-operaadide kategooriasse.

Jääb veel tõestada, et konstrueeritud funktorid F ja G on teineteise pöördfunktorid. Oletame, et FSet-operaad R kompositsiooniga $xx_1\dots x_m$ on antud ja sellest konstrueeritakse funktori F abil kloon kompositsiooniga $[xx_1\dots x_m]$. Vaatleme nüüd FSet-operaadi, mis konstrueeritakse sellest kloonist omakorda funktori G abil. Näitame, et esialgne ja konstrueeritud FSet-operaad langevad kokku. Selleks tuleb meil näidata kahte asja: et iga kategooria FSet morfismi f korral $R(f)$ ja $GF(R(f))$ ning kompositsioonitehted langeksid kokku.

Olgu $x \in R(n)$ ja $f : [n] \to [m]$. Näitame, et f tegutseb esialgse ja konstrueeritud FSet-operaadi korral samamoodi. Sümbolites väljendatuna peame näitama, et $fx = [xp_{f(1),m} \dots p_{f(n),m}]$. Tõepoolest

$$\begin{aligned}[xp_{f(1),m} \dots p_{f(n),m}] &= \mu_{m,n}(x(p^m_{f(1)}\varepsilon) \dots (p^m_{f(n)}\varepsilon)) \\ &= \mu_{m,n}(p^m_{f(1)} \amalg \dots \amalg p^m_{f(n)})(x\varepsilon \dots \varepsilon).\end{aligned}$$

Siin kasutasime seoseid (1), (2) ning W-operaadi definitsiooni kolmandat tingimust. Jääb veel kontrollida, et $\mu_{m,n}(p^m_{f(1)} \amalg \dots \amalg p^m_{f(n)}) = f$,

$$\mu_{m,n}((p^m_{f(1)} \amalg \dots \amalg p^m_{f(n)})(i)) = \mu_{m,n}(m(i-1) + f(i)) = f(i),$$

$1 \leqslant i \leqslant n$.

Teiseks tuleb näidata, et ka kompositsioon langeb kokku. Olgu $x \in R(m)$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, $n = n_1 + \dots + n_m$, $r_i = r_i(\alpha) : [n_i] \to [n]$ ja $x_i \in R(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Siis FSet-operaadi põhjal konstrueeritud klooni kompositsioon on $[xx_1 \dots x_m] = \mu_{m,n}(xx_1 \dots x_m)$ ja omakorda selle põhjal konstrueeritud FSet-operaadi kompositsioon

$$[x(r_1x_1) \dots (r_mx_m)] = \mu_{m,n}(r_1 \amalg \dots \amalg r_m)(xx_1 \dots x_m).$$

Siin kasutasime W-operaadi definitsiooni kolmandat tingimust. Siit saame võrduse $\mu_{m,n}(r_1 \amalg \dots \amalg r_m) = 1_{[n]}$ kehtivuse, kuna $1 \leqslant j \leqslant m$ ja $1 \leqslant i \leqslant n_j$ korral

$$\mu_{m,n}((r_1 \amalg \dots \amalg r_m)(n_1 + \dots + n_{j-1} + i)) = \mu_{m,n}(n(j-1) + i) = i.$$

Sellega on ära näidatud, et $GF = 1$.

Näitamaks $FG = 1$, konstrueerime kloonist K funktori G abil FSet-operaadi $G(K)$ ja sellest omakorda funktori F abil klooni. Näitame, et esialgne ja konstrueeritud kloon langevad kokku. Selleks tuleb kontrollida 2 asja: kompositsioonitehte ja projektsioonide kokkulangevust.

Esimeseks näitame kompositsiooni kokkulangevust. Olgu $x \in K(m)$, $x_i \in K(n_i)$, kus $1 \leqslant i \leqslant m$, $\alpha = (n^m)$ ja $r_i = r_i(\alpha) : [n] \to [nm]$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Kasutades seost (4), saame

$$\mu_{m,n}(xx_1 \dots x_m) = \mu_{m,n}[x(r_1x_1) \dots (r_mx_m)] = [x(\mu_{m,n}r_1x_1) \dots (\mu_{m,n}r_mx_m)].$$

Jääb veel kontrollida, et $\mu_{m,n}r_i = 1_{[n]}$ iga i korral,

$$\mu_{m,n}r_i(j) = \mu_{m,n}(r_i(j)) = \mu_{m,n}(n(i-1) + j) = j,$$

$1 \leqslant j \leqslant n$.

Teiseks kontrollime, et elemendid $p_{i,n}$ jäävad samaks esialgses kloonis ja FSet-operaadi abil konstrueeritud kloonis

$$p_i^n \varepsilon = [p_{1,1} p_{p_i^n(1),n}] = [p_{1,1} p_{i,n}] = p_{i,n}.$$

Sellega on näidatud $FG = 1$ ning teoreem on tõestatud. $\square$

Summary

The term „abstract clone“, which is an important notion of universal algebra, was first used in 1958 by P. Hall in the article „Some word problems“. The term „operad“, which is widespread mainly in topology, was invented in 1972 in the article „The Geometry of Iterated Loop Spaces“ written by J. Peter May (see articles [4] and [5]).

In this bachelor thesis we give both definitions and explain how they are connected to each other using the article [5]. Briefly, both of them are special cases of a general notion, which is called a W-operad.

Let FSet be a category, whose objects are sets $\{0, 1, \ldots, n\}$ for all non-negative integers n and morphisms are all mappings $f : \{0, 1, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, m\}$ satisfying $f(0) = 0$ and $f^{-1}(0) = \{0\}$. Then a W-operad is defined as a functor on some subcategory W of the category FSet, which satisfies some natural properties.

When W is the subcategory, whose morphism are all bijections, then the W-operads are operads in the traditional sense. When W coincides with the category FSet, then the W-operads are abstract clones.

This bachelor thesis consists of four parts. In the first part we give the necessary definitions from the category theory. Hereby we use the books [1] and [2]. In the second part we define abstract clones (based on the article [5]) and operads (article [3]) and also bring some examples. In the third part we do a lot of of preliminary work to finally define verbal categories and W-operads. Again, we represent examples to illustrate these notions. In the last part theorems about the connections between operads and W-operads, clones and W-operads are stated and proved. In the two last parts we use the article [5].

Kasutatud kirjandus

[1] Kilp M., *Algebra II*, Tartu, 1998.

[2] Kilp M., *Kategooriad*, Tartu, 2000.

[3] May J. P., *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[4] Trnková V., *Clone properties of topological spaces*, Archivum Mathematicum (Brno), 42, 427-440 (2006).

[5] Tronin S. N., *Abstract Clones and Operads*, Siberian Mathematical Journal, 43, No. 4, 746-755 (2002).