

Lineaarne optimeerimine

Kaie Kubjas

Berliini Vaba Ülikool

2012

Tervisliku toitumise probleem (ingl.k. diet problem)

- ▶ USA sõjavägi soovis täita toitainete päevased normid, aga teha seda võimalikult soodsalt
- ▶ George Stigler oli üks esimesi teadlasi, kes seda probleemi 1930ndatel ja 1940ndatel uuris
- ▶ 77 toiduainet
- ▶ 9 tingimust toitaineitele
- ▶ 1939 ligikaudne vastus: \$39,93 aastas
- ▶ 1947 täpne vastus: \$39,69 aastas



Stigleri 1939. aasta toitumisplaan

| Toiduaine | Kogus (aastas) | Maksumus (aastas) |
|----------------|----------------|-------------------|
| Nisujahu | 168 kg | \$13,33 |
| Piim | 57 purki | \$3,84 |
| Kapsas | 50 kg | \$4,11 |
| Spinat | 10 kg | \$1,85 |
| Kuivatatud oad | 129 kg | \$16,80 |
| Kokku | | \$39,93 |

Piirangud toitainetele

| Toitaine | Norm (päevas) |
|-------------------------|---------------|
| Kalorid | 3000 kcal |
| Proteiin | 70 g |
| Kaltsium | 0,8 g |
| Raud | 12 mg |
| Vitamiin A | 5000 IU |
| Vitamiin B ₁ | 1,8 mg |
| Vitamiin B ₂ | 2,7 mg |
| Vitamiin B ₃ | 18 mg |
| Vitamiin C | 75 mg |

Kartulid ja oad



- ▶ 1 kg kartuleid: 0,7 eurot, 20 g proteiine ja 170 g süsivesikuid
- ▶ 1 kg ubasid tomatikastmes: 1,4 eurot, 60 g proteiine ja 120 g süsivesikuid
- ▶ päevane norm: 50 g proteiine ja 300 g süsivesikuid

Millise toidurahaga saaksime me päevas hakkama ainult kartuleid ja ubasid süües, nii et päevane proteiini ja süsivesikute norm oleks täidetud?

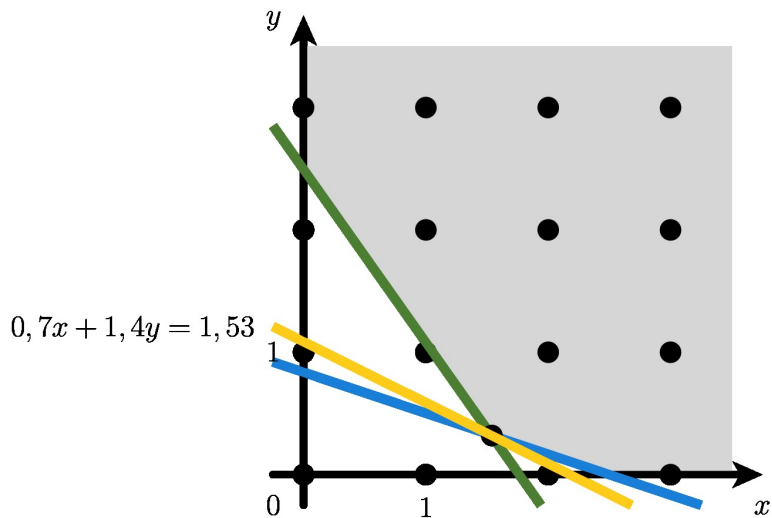
KUIDAS TÕLKIDA SEE PROBLEEM MATEMAATIKA KEELDE?

- ▶ x kg kartuleid
- ▶ y kg ubasid

Lineaarne programm

- ▶ maksumus: $\min 0,7x + 1,4y$
- ▶ proteiinid: $20x + 60y \geq 50$
- ▶ süsivesikud: $170x + 120y \geq 300$
- ▶ $x \geq 0$
- ▶ $y \geq 0$

Graafiline lahendusmeetod



Lineaarne optimeerimine

Mis on lineaarne optimeerimine?

- ▶ kulufunktsiooni minimeerimine/maksimeerimine piirangute tingimustes
- ▶ nii kulufunktsioon kui piirangud peavad olema lineaarsed funktsioonid
- ▶ tervisliku toitumise probleemi puhul on kulufunktsiooniks toidukorvi maksumus ning piiranguteks toitainete päevased normid

KUIDAS LAHENDADA LINEAARSET PROGRAMMI?

- ▶ graafiline lahendusmeetod enamasti ei tööta
- ▶ matemaatikud tegelevad lahendusmeetodite otsimisega
- ▶ George Dantzig avastas 1947. aastal simpleksmeetodi, millega lahendati esimest korda täpselt ka tervisliku toitumise probleem
- ▶ tänaseks on avastatud mitmeid teisigi üldisi lahendusmeetodeid



Reisiva müügimehe probleem (ingl.k. travelling salesman problem)

- ▶ reisiv müügimees tahab käia n linnas
- ▶ reis algab ja lõpeb samas linnas
- ▶ igas linnas käib ta täpselt ühe korra

Millises järjekorras peaks ta linnad läbima, et läbitud marsruut oleks lühim? Mitu kilomeetrit peab ta selleks läbima?



Reisiva müügivehe probleem

- ▶ Tartu – 1, Valga – 2, Võru – 3, Põlva – 4
- ▶ $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}$
- ▶ $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}$ on 0 või 1

Lineaarne programm

- ▶ $\min 86x_{12} + 71x_{13} + 49x_{14} + 73x_{23} + 96x_{24} + 25x_{34}$
- ▶ $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2$
- ▶ $x_{12} + x_{23} + x_{24} = 2$
- ▶ $x_{13} + x_{23} + x_{34} = 2$
- ▶ $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2$

Reisiva müügimehe probleem

- ▶ täisarvuline lineaarne optimeerimine - spetsiaalsed lahendusmeetodid täisarvuliste lineaarse optimeerimise probleemide lahendamiseks
- ▶ üks enim uuritud probleeme matemaatilises optimeerimises - spetsiaalsed meetodid just reisiva müügimehe probleemi lahendamiseks
- ▶ hakati tegelema 1950ndatel ja 1960ndatel
- ▶ leiti lühim marsruut 49 USA linna jaoks
- ▶ kui linnade arv suureneb, siis väga kiiresti muutub lahenduse leidmine väga raskeks
- ▶ praegu on maailmarekord 33810 linna - täpselt nii paljude linnade jaoks osatakse reisiva müügimehe probleemi täpselt lahendada

Berliini metroo sõidugraafiku optimeerimine



You Tube periodic timetable optimization

Periodic Timetable Optimization

MatheonBerlin + Subscribe 18 videos

1:23 / 4:55 Normal 360p

Like + Add to Share 411 views

Uploaded by [MatheonBerlin](#) on Aug 18, 2010

The planning process in public transport is a highly complex task. Currently, this can only be handled by splitting it into subtasks. These are grouped into two blocks: service planning (network design, line planning, timetabling) and

Show more

<http://www.youtube.com/watch?v=i-xwcvocKwY>

Näiteid elust enesest

- ▶ Tallinna ühistranspordi sõiduplaani koostamine
 - ▶ soovime minimeerida ooteaegu ja kulu töötajatele ning kütusele
 - ▶ piiranguteks on busside ja töötajate arv, reisijate nõudluse täitmine
- ▶ Postimehe transportimine Kroonpressi trükikojast müügipunktidesse Tartu linnas
 - ▶ soovime minimeerida kulu kütusele ja töötajatele
 - ▶ piiranguteks on autode arv ja kellaaeg, millal lehed peavad olema müügipunktides
- ▶ õpilaste istumisplaani koostamine klassis
 - ▶ soovime maksimeerida õpilaste rahulolu istekohta ja pinginaabriga
 - ▶ piiranguks on, et igal istekohal saab istuda ainult üks õpilane ja et igal õpilasel on täpselt üks istekoht

MIDA ME TÄNA ÕPPISIME?

- ▶ lineaarset optimeerimist kasutatakse, et muuta midagi efektiivsemaks
 - ▶ tervisliku toitumise probleem
 - ▶ reisiva müügimehe probleem
- ▶ matemaatikud tegelevad
 - ▶ lineaarsete optimeerimise probleemide matemaatika keelde tõlkimisega
 - ▶ lineaarsete programmide lahendamisega
 - ▶ uute lahendusmeetodite otsimisega

Kodused ülesanded

- ▶ Vali välja kaks toiduainet ning koosta lineaarne programm nagu kartulite ja ubade näite puhul erinevusega, et piiranguteks olgu vitamiinide päevased normid. Lahenda see lineaarne programm!
- ▶ Koosta lineaarne programm lühima teekonna leidmiseks, mis algaks ja lõppeks Narvas ning läbiks Viljandit, Jõgevat, Paidet ja Rakveret täpselt ühe korra.
- ▶ Kas Sa oskad tuua teisigi näiteid elust enesest, kus saaks lineaarse optimeerimise abil midagi paremaks muuta?
- ▶ Kas Sa oskad neid probleeme matemaatika keelde tõlkida?